A Tutorial Introduction to Decision Theory

Il s'agit d'un article introductoire à la théorie de la décision, un cadre formel qui permet de faire des choix d'actions parmi des alternatives lorsque les conséquences de ces actions ne sont connues que dans un sens probabiliste.

L'article démarre par une explication de ce qu'on doit comprendre par un "bon choix" d'action lorsqu'il y a des incertitudes sur ses conséquences. Celui-ci doit être basé sur les connaissances de l'agent à un instant donné et ses préférences, ces dernières étant représentées à travers la fonction d’utilité de l’agent. Il faut noter qu’un bon choix dans ce sens, et même le meilleur choix, peut ne pas conduire à un bon résultat final à cause des incertitudes.

Deux aspects fondamentaux de la théorie de la décision sont la valeur associée à un résultat, provenant de la théorie de l’utilité, et l’information dont on dispose, modélisée par des probabilités.

La base de la théorie de l’utilité est de donner des valeurs numériques à des résultats. Une hypothèse fondamentale faite pour cela est de supposer que chaque paire de résultats peut être comparée : un des résultats sera forcément meilleur ou aussi bon que l’autre. On demande aussi à ce que cette comparaison des résultats soit transitive : préférer A à B et B à C implique préférer A à C.

Une autre hypothèse fondamentale de la théorie de l’utilité est que l’on peut comparer non seulement des résultats purs mais aussi des loteries, c’est-à-dire des situations où l’on peut avoir quelques résultats avec une certaine probabilité. En particulier, si un agent préfère A à B, alors, si on lui donne le choix entre deux loteries entre A et B, l’agent préférera la loterie donnant plus de probabilité à A.

On demande aussi à ce que les loteries n’aient pas de valeur intrinsèque (“no fun in gambling”), ce qui implique que l’on n’a pas intérêt à faire des loteries imbriquées, où le prix d’une loterie serait de participer à une deuxième loterie. Finalement, on suppose une continuité des loteries: si l’agent a l’ordre de préférence A > C > B, alors il existe une loterie entre A et B telle que l’agent sera indifférent entre cette loterie et le résultat C.

Sous ces hypothèses, il est possible de condenser les préférences de l’agent dans une fonction d’utilité *u* telle que u(A) > u(B) si et seulement si l’agent préfère A à B. En plus, si l’agent est indifférent entre C et une loterie entre A et B avec probabilités respectives P et 1-P, alors u(C) = P u(A) + (1-P) u(B), c’est-à-dire, l’utilité de la loterie est l’espérance de son gain.

Lorsque les résultats possibles sont, par exemple, des montants d’argent, la fonction d’utilité n’est pas forcément linéaire en ces montants à cause de l’aversion au risque des agents. Les préférences d’un agent ne changent pas non plus si l’on translate ou fait un changement d’échelle de la fonction d’utilité, ce qui permet, par exemple, de supposer que ses valeurs sont dans [0, 1].

L’article donne aussi plusieurs descriptions de comment déterminer la fonction d’utilité d’un agent à partir de questions qu’on lui pose sur ses préférences. Une technique utile est de comparer les résultats à des gains financiers.

Afin de représenter les incertitudes sur les résultats, on utilise la théorie de probabilités. La présentation faite dans l’article revient à constater que l’on a besoin non seulement de représenter des incertitudes mais aussi leur dépendance en l’information dont on dispose, ce pourquoi on utilise des probabilités conditionnelles et on se sert de la formule de Bayes pour mettre à jour des probabilités a priori avec des informations acquises en calculant des probabilités à posteriori.

Avec les outils de la théorie de l’utilité et des probabilités, on peut passer à la théorie de la décision à proprement parler. Dans un cadre simple, lorsque l’on a un certain nombre d’actions possibles et que l’on connaît les résultats possibles de chaque action et leurs probabilités, l’idée est de calculer l’espérance de l’utilité selon chaque action et ensuite de choisir l’action maximisant cette utilité espérée. Les cas les plus compliqués correspondent à des problèmes avec une séquence de décisions, dans lesquels une première décision doit être prise et suite à laquelle on observe un résultat, à partir duquel on doit prendre une deuxième décision, et ainsi de suite. Une façon de les représenter est à travers un arbre de décision et de calculer les utilités espérées à partir des feuilles vers la racine, afin de prendre une décision dans la racine. Cette décision donnera un résultat qui peut impliquer un recalcul des probabilités dans la branche choisie, avant de procéder de façon inductive. Cela peut avoir une complexité trop élevée, nécessitant ainsi de méthodes d’approximation permettant de résoudre le problème en temps raisonnable.

La dernière partie de l’article aborde la valeur de l’information, ou la valeur de résoudre une incertitude. Il s’agit d’une décision spéciale que l’agent peut prendre qui lui permettra d’avoir des estimées de probabilités de résultats possibles plus précises, voire certaines, mais qui a aussi un coût. Pour donner une utilité à cette décision spéciale, on peut calculer l’utilité espérée avec chaque résultat possible de la recherche d’information, en prenant en compte le prix d’obtenir information, et comparer cette utilité espérée avec l’utilité espérée sans l’information. En pratique, il est important à savoir qu’il peut y avoir trop de recherches d’information possibles et qu’estimer l’utilité de chacune peut être trop coûteux, d’où l’importance d’une étude plus approfondie de cette question, détaillée dans les autres articles.